# Использование нефинитных методов в семантическом подходе к исследованию типов формальной логики.

**Титов А.В.**
*кандидат технических наук*
*доцент МГУ ПС (МИИТ), доцент МГТУ им. Баумана*
*(Москва, Россия)*

Рассматривается подход к изучению типов логических исчислений основанный на использовании нефинитных методов, позволяющих рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой. К ее исследованию могут быть привлечены методы теории структур, или в более общей постановке методы теории категорий, что является развитием семантического подхода к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки [1].

Использование такого подхода обосновано тем, что в метаматематике как теории, изучающей формализованные математические теории, т.е.множество конечных последовательностей символов (формул и термов) и множество операций над этими последовательностями используется аппарат различных разделов математики и она, тем самым, становится объектом математического исследования [2].

Множество формул формализованной теории является алгеброй, в общем случае с бесконечными операциями. После введения отношения эквивалентности на множестве формул, фактор-алгебра становится структурой, законами которой определяется тип логики принимаемой в теории. Отсюда естественность применения в математической логике методов теории структур.

В частности, примером алгебраизации логических исчислений может служить тот факт, что доказана эквивалентность теоремы о полноте пропозиционального исчисления и теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр.

Применение нефинитных методов, использующих современные математические теории, позволяет выявить математическую структуру формальной логики и проследить взаимосвязь различных видов логических исчислений, другими словами выявить ее математическое содержание.

Рассмотрение множества формул или множества классов эквивалентности формул как универсалных алгебр, предложено Линденбаумом и Тарским., это позволило установить связь между классической терией (логикой) и теорией булевых алгебр. Алогичная связь для неклассических теорий между интуиционистской логикой и импликативными решетками установлена в работах Стоуна Тарского, Мак-Кинси.

Обобщением метода истинностных таблиц является метод интерпретации формул как отображений в решетках (оценок), что нашло развитие в работах Мостовского, который распростронил этот метод на интуиционистское предикатное исчисление. В дальнейшем в работах Сикорского и, Расевой, получивших алгебро-топологическое доказательство теоремы Геделя о полноте.

В настоящее время применение неклассических логик в математике ограниченно, однако постоянно растущие и изменяющиеся требования к применяемому в формальных моделях сложных объектов и процессов математическому аппарату, могут существенно изменить это положение и привести к развитию математических теорий основанных на использовании различных видов неклассической логики.

Если в формализованной теории операции заменяют шаги дедукции, то вполне естественно представить такую систему как категорию. С другой стороны от вывода в исчислении требуется сохранение истинности или, в случае многозначности значений истинности, преобразование истинности по известному закону. Но это означает, что вывод или шаги дедукции связаны с сохранением или изменением по известному закону оценки, которая так же может быть представлена как морфизм определенной категории.

Если рассматривать модели как функторы, сохраняющие дополнительную структуру из категории, соответствующей данной теории в категорию множеств для классической теории, то возможность рассматривать вместо категории множеств другие категории дает возможность изучать и строить неклассические теории. Тогда категория, на которой принимает значение функтор определяет тип логики для исследуемой модели.

Ценным для нашего исследования является то обстоятельство, что в теории категорий свойства объекта определяются не через его внутреннюю структуру, а через его связи с другими элементами, которые выражаются через функции (стрелки)

Расширения, даваемые теорией категорий, распространяются и на логику. Классическая логика представлена в категории set двузначной булевой алгеброй. Каждый топос имеет аналог этой алгебры, а значит, определяет некоторое логическое исчисление, которое, впрочем, может отличаться от классической логики, поскольку логические принципы в топосе есть принципы интуиционистской логики. [3]

С философской точки зрения категорный подход к логике интересен тем, что расширяет ее возможности, при этом позволяет проследить связь между классическими и неклассическими вариантами логических исчислений.

Как вариант категорного подхода к анализу логических исчисления может рассматриваться и обобщенный нестандартный анализ, который работе [4] опренделяется как «алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде **глобальных элементов некоторого пучка**.».

.При этом подходе различные типы логики определяется структурой, на которой принимает значение оценка.

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение «А есть В» считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из А, т.е.в случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств P(A) некоторого множества А. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности – 0 и 1, причем только само А имеет меру 1. Кроме того, если А есть бесконечное множество, то и разность A/N, где N – любое конечное множество, при таком задании меры имеет меру ноль.

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле $\phi$ элемента из X, обозначаемого $\|\phi_k\|_X$ или короче $\|\phi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $\|\phi\wedge\psi\| = \|\phi\|\wedge\|\psi\|$, $\|\phi\vee\psi\| = \|\phi\|\vee\|\psi\|$, $\|\phi\rightarrow\psi\| = \|\phi\|\rightarrow\|\psi\|$, $\|\neg\phi\| = \neg\|\phi\|$» [5].

При этом X рассматривается как импликативная решетка общего вида. Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления.

В частности, в нестанданртном анализе рассматривается множество - степень $K^I$, где $K$-структура, а формулы –суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на $P$(I), выбор в качестве j ультрафильтра в $P$(I) позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)$ ($Tr_j(\phi_k)\equiv\|\phi_k\|\in j$) [4] ) «обычной» истинностью суждения $\phi_k$ о структуре $K^I$. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j\equiv K^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2],\ldots[f_n])\Leftrightarrow([\phi_k(f_1, f_2,\ldots,f_n)]\in j)$, где $[f_i]\in K^I|j$. Как показано в [2] это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик.

В [5] приводится вариант логики с двумя типами отрицания - Н-В логики.

В работе [6] показано, что аксиомы этого исчисления полностью соответствуют утверждениям о свойствах импликативной решетки общего типа, два вида дополнения порождают свойства соответствующие интуиционистской логики и логики двойственной к ней.

На категорном языке модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая какую-либо другую категорию, обладающую дополнительной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. Иными словами в категорном подходе ***оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру***. При таком подходе вид логики будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т.д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в [3] рассматривается язык PL, в который включена новая связка $\nabla$ и если $\alpha$ формула этого языка, то формула $\nabla\alpha$ читается «локально имеет место, что $\alpha$».

Введение в теории категорий классификатора подобъектов $\Omega$, и связанная с этим понятием $\Omega$ -аксиома, порождает утверждение, о том, что в категории, обладающей классификатором подобъектов Sub (d) $\cong$ $\boldsymbol{K}$ (d,$\Omega$). В частности, в качестве $\boldsymbol{K}$ можно взять категорию, соответствующую формальной теории (в частности алгебру формул логического исчисления), в качестве $\Omega$ - структуру, на которой принимает значение оценка. В [3] доказано, что утверждение о том, что топос $\boldsymbol{K}$ булев, эквивалентно утверждению о том, что Sub $\Omega$ - булева алгебра. Этим определяются и ограничения на свойства функции $\chi(f)$:d$\to\Omega$ – она должна сохранять структуру. В частности подтверждается предположение о том, что структура оценки для булевой алгебры формул должна быть булевой алгеброй, что не всегда учитывается в многозначных логиках.

Литература.


1. Титов А.В. Обобщенный нестандартный анализ и исследование форм логического исчисления на основе структур значений оценки. // Ученые записки Крымского государственного университета им. В.И. Вернадского. Серия: Философия, Культурология, Политология, Социология. - Симферополь.: Крымский федеральный университет им В.И.Вернадского, 2015. сс. [ISSN 1606-3715]
2. Рассева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. -М.: «Наука», 1972,- 591 с.
3. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики.-М: Мир, 1983, -468 с.
4. Любецкий В.А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем.// П.Т.Джонсон. Теория топосов.-М.: «Наука», 1986.- сс.376-430
5. Любецкий В.А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа// УМН, том 44, выпуск 4(269), сс. 99-153.
6. Васюков В.Л. «Категорная логика».-М.: АНО Институт логики. 2005,- 194 с.
7. Титов А.В. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки//Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики/ Под ред. В.А.Божанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014, - 432с.