

## **Категорный подход к исследованию типа логического исчисления на основе оценки.**

**Титов А. В.**

*Кандидат технических наук, доцент  
Российский университет транспорта (МИИТ), МГТУ им Баумана  
(г. Москва, Российская Федерация)*

УДК 165.23

*Рассматривается взаимосвязь различных типов логического исчисления на основе исследования оценки как морфизма, сохраняющего структуру из алгебры формул в структуру значений оценки. К ее исследованию могут быть привлечены нефинитные методы обобщенного нестандартного анализа как раздела теории категорий. Этот подход является развитием семантического подхода к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки.*

**Ключевые слова:** *оценка, математическая структура, категория, обобщенный нестандартный анализ.*

## **The categorical approach to the study of the logical calculus based on the evaluation.**

**Titov A. V.**

*Doctor of Technical Sciences, Associate Professor  
Russian University of transport (MIIT)  
(Moscow, Russian Federation)*

*Examines the relationship between different types of logical calculi, based on the study of evaluation as a morphism, that preserves the structure of the algebra of formulas to the structure of the estimated values. For research can be brought non-finite generalized methods of nonstandard analysis as a section of category theory. This approach is the development of a semantic approach to the study of the types of formal logic on the basis of research evaluation.*

**Keywords:** *valuation, the mathematical structure, a category, a generalized non-standard analysis, formal logic.*

Модели задач управления и прогнозирования динамики развития сложных систем, основанные на использовании классической логики с законами исключенного третьего и противоречия, в частности, булевой логики, имеют ограниченную область использования. К попыткам преодоления этого ограничения и расширения моделирования на объекты и системы высокой степени сложности можно отнести использование многозначной и нечеткой логики при моделировании задач управления и прогнозирования развития сложных систем.

Однако при использовании указанных логических исчислений нарушается принцип сохранения структуры в оценке как отображении (морфизме) алгебры логики на структуру значений оценки.

В [1] рассматривался подход к использованию математических структур для классификации и реконструкции видов пропозициональной логики. В основе предлагаемого подхода лежало положение о том, что оценка  $\varphi: Fm \rightarrow A$ , где  $A$  структура, элементы которой – значения истинности, является гомоморфизмом. В [2] предлагается определить область значения оценки  $A$  как структуру, построенную над семейством  $P(K^V)$  подмножеств формул языка структуры  $K$  и рассматривается зависимость типа логического исчисления от вида структуры  $A$ .

Множество всех формул языка нулевого или первого порядка в классической логике является универсальной алгеброй  $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg, \rangle$  с тремя бинарными и одной унарной

операцией или обобщенной алгеброй  $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \cup, \cap, \neg \rangle$  с обобщенными операциями  $\cup, \cap$ , соответствующим кванторным приставкам.

Исходная алгебра  $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$  не является решеткой, т. к. для формул  $f \in Fm$  и  $g \in Fm$ ,  $f \cap g \neq g \cap f$ . Однако, как мы знаем, исчисление предикатов является булевой алгеброй. Встает вопрос о том, в силу чего исходная алгебра формул  $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$  «принимает» на себя ту или иную алгебраическую структуру.

Можно поставить вопрос о зависимости логического исчисления как алгебраической структуры от вида оценки.

Рассмотрим это на примере языка нулевого порядка (пропозициональной логики).

Общепринятое определение оценки заключается в том, что под оценкой языка  $L_0$  понимается отображение  $v: V_0 \rightarrow A$ , где  $A$  – алгебра, подобная алгебре  $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$ , что следует, например, из того, что оценка может рассматриваться как подстановка. Если при этом  $\langle Fm, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg \rangle$  свободная алгебра с системой образующих  $V_0$ , то  $v$  может быть продолжено на  $Fm$  до гомоморфизма. Наличие такого гомоморфизма означает, что если известна структура алгебры  $A$ , на которой принимают значения оценки формул языка  $L_0$ , то эта структура сохраняется и на алгебре формул языка  $L_0$   $\langle Fm, o_1, o_2, o_3, \dots, o_n \rangle$ , что позволяет рассматривать разделение логических исчислений по типам на основе рассмотрения различных типов оценок.

Рассмотрение оценок со значением на импликативных решетках позволяет проводить классификацию логических исчислений в зависимости от вида решетки. В [2] показано, что аксиомы Н-В логики могут быть получены из свойств псевдобулевой алгебры и свойств алгебры, двойственной псевдобулевой, при условии, что операции  $\rightarrow, \div$  Н-В логики  $\langle A, \cap, \cup, \rightarrow, \div, \neg, \top, 0, 1 \rangle$  интерпретируются на алгебре значений оценки  $\langle A, \cap, \cup, \Rightarrow, \div, \neg, \top, 0, 1 \rangle$  как псевдодополнение ( $\Rightarrow$ ) и псевдоразность ( $\div$ ), соответственно, а два вида отрицания  $\neg$  и  $\top$ , как  $\cap$ -дополнение:  $\neg a = a \Rightarrow 0$ , и  $\cup$ -дополнение  $\top a = 1 \div a$ .

Обобщением этого подхода на случай алгебры оценок с дополнительной структурой может служить подход, основанный на использовании теоретико-категорного представления. При этом представлении подход, основанный на семантическом анализе типов логических исчислений, моделируется функторами, сохраняющими дополнительную категорную структуру, из категории, соответствующей данной формальной теории, в категорную структуру, на которой принимают значения оценки, в случае обобщения структур, являющихся решетками, это скелетная категория порядка с произведением и копроизведением.

## Список литературы

1. Титов А. В. О зависимости типа логического исчисления от структуры оценки // Седьмые смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 34–35
2. Титов А. В. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки // Доказательство, очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды московского семинара по философии математики. – М.: Книжный дом «Либроком», 2014. – 432с.